

Tema: Polinomios y fracciones algebraicas

1. Opera y simplifica:

a) $(5x^2 - 4x + 2) \cdot [2x^3 - 3x + 2 - x(2x - 1)(x - 2)]$ b) $(2y + x + 1) \cdot (x - 2y) - (x + 2y) \cdot (x - 2y)$

Sol: a) $25x^4 - 45x^3 + 40x^2 - 18x + 4$ b) $x - 2y$

2. Extrae factor común en $35x^5 - 42x^4 + 7x^3$

Sol: $7x^3(5x^2 - 6x + 1)$

3. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables (cuadrado de un binomio y suma por diferencia).

a) $(7x^2 - 3)^2$ b) $(\sqrt{3}x - 2) \cdot (\sqrt{3}x + 2)$

Sol: a) $49x^4 - 42x^2 + 9$ b) $3x^2 - 4$

4. Expresa en forma de producto utilizando las identidades notables (cuadrado de un binomio y suma por diferencia).

a) $16x^2 - 9$ b) $5x^4 - \frac{1}{16}$ c) $x^2 - 6x + 9$ d) $4x^4 + 4x^2 + 1$

Sol: a) $(4x - 3)(4x + 3)$ b) $\left(\sqrt{5}x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{5}x^2 + \frac{1}{4}\right)$ c) $(x - 3)^2$ d) $(2x^2 + 1)^2$

5. Desarrolla la expresión $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^5$ utilizando la fórmula del binomio de Newton.

Sol: $32x^5 - 40x^4 + 20x^3 - 5x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{1}{32}$

6. Efectúa la división $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$ y comprueba que se verifica

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente} + \text{Resto}$$

Sol: Cociente: $C(x) = 2x^2 + x - \frac{4}{3}$, Resto: $R(x) = -4x + \frac{8}{3}$

7. Efectúa la división $(6x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 6x - 6) : (3x^2 + 2x + 1)$ y comprueba que se verifica

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente} + \text{Resto}$$

Sol: Cociente: $C(x) = 2x^2 + x - 3$, Resto: $R(x) = -x - 3$

8. Efectúa la siguiente división $(6x^5 - 3x^4 + 2x) : (x + 1)$ utilizando el algoritmo tradicional y mediante la regla de Ruffini. Comprueba que se cumple el teorema del resto, es decir, que el resto de la división coincide con el valor del dividendo en $x = a$ cuando se divide por $x - a$.

Sol: Cociente: $C(x) = 6x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 9x + 11$, Resto: $R(x) = -11$

9. En una división conocemos el dividendo $D(x) = x^3 + 5x - 1$, el cociente $C(x) = x - 2$ y el resto $R(x) = 9x - 1$. Halla el divisor $d(x)$

Sol: $d(x) = x^2 + 2x$

10. Comprueba que el polinomio $P(x) = 2x^5 + x^4 + 13x^3 - 3x^2 + 18x - 10$ no es divisible por $x - a$ para ningún valor entero de a . ¿Significa esto que $x - a$ nunca es divisor de $P(x)$ para ningún número real a ?

Comprueba que $Q(x) = x - \frac{1}{2}$ es divisor de $P(x)$ utilizando la regla de Ruffini.

11. Calcula los valores de a y b para que el polinomio $P(x) = 4x^3 + 4x^2 + ax + b$ sea divisible por

$$Q(x) = 2x^2 - x - 1$$

Sol: $a = -5$ $b = -3$

12. Efectúa la siguiente división $(6x^4 - 4x^3 + 3x) : (2x + 1)$ utilizando la regla de Ruffini.

Sol: Cociente: $C(x) = 3x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{8}$, resto: $R(x) = -\frac{5}{8}$

13. Halla el resto de la división $(-x^6 - 2x^5 - 4mx^2 + x - m + 1) : (x + 2)$ utilizando el teorema del resto.

¿Para qué valor de m el resto de la división es 16?

Sol: Resto: $-17m - 1$. Para $m = -1$

14. Halla el cociente y el resto de la división $(x^3 + mx + 2) : (x - 2)$. ¿Para qué valor de m el resto de la división es 6?

Sol: Cociente: $C(x) = x^2 + 2x + m + 4$, Resto: $R(x) = 2m + 10$. El resto es 6 cuando $m = -2$

15. Factoriza y halla las raíces de los polinomios:

a) $P(x) = 2x - 6$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$

c) $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$

d) $P(x) = 10x^2 + 27x + 5$

e) $P(x) = x^2 + x + 1$

f) $P(x) = x^2 - 4x + 4$

Sol: a) $2(x - 3)$, Raíces: 3; b) $(x - 2)(x - 3)$, raíces: 2, 3; c) $(2x + 3)(x + 2)$, raíces: $-2, -\frac{3}{2}$;

d) $(2x + 5)(5x + 1)$ raíces: $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{5}$ e) $x^2 + x + 1$, raíces: no hay; f) $(x - 2)^2$, raíces: 2 (doble)

16. Factoriza y halla las raíces de los polinomios:

a) $P(x) = 21x^5 - 36x^4 + 9x^3 + 6x^2$ b) $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$ c) $P(x) = 9x^4 + 12x^2 + 4$

Sol: a) $3x^2(x - 1)^2(7x + 2)$, raíces: 0 (doble), 1 (doble), $-\frac{2}{7}$ b) $(x + 2)(2x - 1)(2x + 1)$, raíces:

$-2, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$ c) $(3x^2 + 2)^2$, raíces: no tiene.

17. Factoriza y halla las raíces del polinomio $P(x) = 16x^3 - 12x^2 - 24x - 7$. Ayuda: una raíz es $-\frac{1}{2}$

Sol: $(4x - 7)(2x + 1)^2$, raíces: $\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}$ (doble).

18. Factoriza y halla las raíces del polinomio $P(x) = 18x^4 + 12x^3 + 11x^2 + 6x + 1$. Ayuda: el polinomio $Q(x) = 2x^2 + 1$ es divisor de $P(x)$.

Sol: $(3x + 1)^2(2x^2 + 1)$, raíces: $-\frac{1}{3}$ (doble).

19. Factoriza y halla las raíces del polinomio $P(x) = 5x(x+1)^2(3x+5)(x^2-1)$

Sol: $5x(x+1)^3(x-1)(3x+5)$, raíces: 0, 1, $-\frac{5}{3}$, -1 (triple).

20. Factoriza y halla las raíces del polinomio $P(x) = 5x(x+1)(3x-5) - 30$

Sol: $5(x-2)(3x^2+4x+3)$, raíces: 2

21. Dado el polinomio $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 8x + a$.

a) Calcula el valor de a para que $P(-1) = -2$

b) Para el valor de a hallado, descompón el polinomio factorialmente y halla las raíces.

Sol: a) $a = -12$ b) $(x-1)(x+2)^2(2x+3)$, raíces: 1, $-\frac{3}{2}$, -2 (doble)

22. Escribe un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes:

* Es divisible por $x-3$.

* Es divisible por $x+4$

* El valor numérico en $x = -1$ es -36

Sol: $P(x) = 3x^2 + 3x - 36$

23. Factoriza y halla las raíces de $P(x) = x^3 - a^3$. Ayuda: prueba si es divisible por $x-a$

Sol: $(x-a)(x^2+ax+a^2)$, raíces: a

24. Halla el máx.c.d. y mín.c.d. de los polinomios:

$P(x) = 12x^4 - 78x^3 + 168x^2 - 120x$ $Q(x) = 8x(x^3 - 3x - 2)$

Sol: $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = 2x(x-2) = 2x^2 - 4x$,

$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = 24x(x-2)^2(x+1)^2(2x-5) = 48x^6 - 216x^5 + 96x^4 + 552x^3 - 288x^2 - 480x$

25. Halla el máx.c.d. y mín.c.d. de los polinomios:

$P(x) = (x-3)^2$ $Q(x) = 9 - x^2$

Sol: $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = x-3$, $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = -(x-3)^2(x+3) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

26. Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones algebraicas de dos formas: simplificando buscando la fracción irreducible equivalente en cada una y "multiplicando en cruz".

$\frac{x^3-x}{x^3+x^2}$ y $\frac{3x-3}{3x}$

Sol: Sí son equivalentes.

27. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{(3-y)(a+b) - (a-b)(3-y)}{4by - 12b}$ b) $\frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{4a^2b^2 - 4a^2bx + a^2x^2}$

Sol: a) $\frac{-1}{2}$ b) $\frac{2b}{2b-x}$

28. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{10x^2(x-2)}{5x(x-1)}$ b) $\frac{10x^2(x-2)+10}{5x(x-1)}$

Sol: a) $\frac{2x(x-2)}{x-1}$ b) $\frac{2(x^2-x-1)}{x}$

29. Opera y simplifica el resultado:

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}$ b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x} - \frac{x+1}{x}$ b) $\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{2x-2}{4x}$

Sol: a) 1 b) 0 c) 1

30. Opera y simplifica el resultado:

$$\frac{2x+1}{x^2+3x} - \frac{1}{x+3}$$

Sol: $\frac{x+1}{x(x+3)}$

31. Opera y simplifica:

$$\frac{3x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{3(2x-5)}{2-x}$$

Sol: $\frac{-3x^2+7x-1}{x(x-2)}$

32. Opera y simplifica:

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2}$$
$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

Sol: $(x-1)^2$

33. Opera y simplifica:

$$\frac{2}{x^2+x-6} + \frac{3x}{4x^3-4x^2-7x-2} - \frac{1}{2x^2+7x+3}$$

Sol: $\frac{9x^2+20x+4}{(x-2)(x+3)(2x+1)^2}$

34. Opera y simplifica:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

Sol: $\frac{3x+2}{2x+1}$

35. Opera y simplifica:

$$\frac{2a}{a-3b} + \frac{3b}{a+3b} - \frac{a^2+3ab+18b^2}{a^2-9b^2}$$

Sol: 1

36. Opera y simplifica:

$$1 + \frac{x-y}{x+y}$$
$$\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}$$

Sol: $\frac{y-x}{2x}$

37. Opera y simplifica:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \left(3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) (2x - x + 1) + 1 \right) 2x - x$$

Sol: $\frac{6x^3 - 2x^2 - 7x}{2}$

38. Opera y simplifica:

$$\frac{(x-1)(2x-1) - (x-1)^2}{(x-1)^2}$$

Sol: $\frac{x}{x-1}$

39. Calcula el valor de k para que al simplificar la fracción algebraica $\frac{3 + \frac{x-9}{x-1}}{k - \frac{x+1}{x-1}}$ resulte un polinomio de primer

grado. Escribe la expresión de dicho polinomio.

Sol: $k = 1, -2x + 6$